レベル3のWirtinger積分から得られるフックス型方程式について (微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題)

AUTHOR(S):

眞野, 智行

数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 176-194

レベル3のWirtinger積分から得られるフックス型方程式について

京都大学・数理解析研究所　眞野　智行 (Toshiyuki Mano) [1]

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

§0 テータ関数についての記号の準備. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta_{a,b}(u) = \theta_{a,b}(u,\tau) := -i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi i(n+a+1/2)^2\tau} e^{2\pi i(n+a+1/2)(u+b)}$$

とする. この関数は u についての擬周期性

$$\theta_{a,b}(u+1) = -e^{2\pi ia}\theta_{a,b}(u), \quad \theta_{a,b}(u+\tau) = -e^{-\pi i\tau-2\pi i(u+b)}\theta_{a,b}(u)$$

をもち, $u \equiv -(a\tau+b) \mod \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ において1位の零点をもつ. また $\rho_{a,b}(u) := \theta'_{a,b}(u)/\theta_{a,b}(u)$ と定める (以下, 記号 $'$ は u に関する微分を表し, τ についての微分は $\dot{}$ で表すことにする). 特に, $\theta_{0,0}(u) = \theta(u)$, $\rho_{0,0}(u) = \rho(u)$ 等と書くことがある.

§1 導入. Wirtinger 積分とは W. Wirtinger によって 1902 年の論文 [11] において導入された, Gauss の超幾何関数のテータ関数を用いた次のような積分表示である:

$$\begin{aligned}&\lambda(\tau)^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\lambda(\tau))^{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\tau))\\ &\qquad = \frac{2\pi\Gamma(\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\alpha-1}\theta_1(u)^{2\gamma-2\alpha-1}\theta_2(u)^{2\beta-2\gamma+1}\theta_3(u)^{-2\beta+1}du,\end{aligned}$$

ここで $\lambda(\tau) = \theta_1^4/\theta_3^4$ は楕円 modular 函数の一つである lambda 関数である. この式自体は超幾何函数に対する Euler の積分表示を $\mathbf{P}^1$ 上4点で分岐する2重被覆を介して楕円曲線上の積分として書き直せば得られるが, Wirtinger は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ 上の多価函数である超幾何関数を, 上半平面上で一意化して記述するためにこのような表示を導入したと思われる. 例えば超幾何函数の接続公式あるいはモノドロミ群の計算といった問題は, Wirtinger 積分の方では modular 群 $SL(2,\mathbf{Z})$ および $\Gamma(2)$ の一次分数変換による作用を, 対応する楕円曲線の間の同型写像に起因する積分の変数変換の下での積分路の取替えを計算する問題に置き換わる. このような計算は渡辺文彦氏により最近の論文 [8], [9], [10] において実行されている.

本稿の基本的なアイデアは上の構成を逆に辿ることによってその一般化を行うこと, すなわち上半平面上の楕円曲線の族の上でテータ函数の冪積の積分によ

[1]Partially supported by GCOE, Kyoto University.

り定義される函数から出発し, modular 群に関する対称性を利用してそれが代数函数を係数とする線形微分方程式 (代数曲線上の Fuchs 型方程式) の解になっていることを示して, その性質を研究することである. 特に今回はレベル 3 の合同部分群に関係するいくつかの場合において, 具体的に得られた結果について紹介する.

Remark 1. Wirtinger は Riemann 全集 1902 年版の補遺 (Nachträge) [7] の編者の一人である. その中で彼は Riemann がテータ函数の複素冪積の積分について考察していたことを報告している (遺稿の中にそのような数式の記述が見られるとのことである). Riemann が考えた積分において被積分函数の分岐点をトーラスの 2 等分点 $(u=0,1/2,\tau/2,(1+\tau)/2)$ に取ったものが Wirtinger 積分に一致するので, Wirtinger はおそらく Riemann の遺稿からそのアイデアを得たものと思われる. もっとも Riemann 自身がどのような動機でそのような積分を考察したのかについては全く不明である. ただ, 最近 [3], [4] において, Riemann の積分を拡張したもの (Riemann-Wirtinger 積分と呼んでいる) がトーラス上のモノドロミ保存変形の特殊解 (Painlevé 方程式における Riccati 解の類似) として自然に現れることが明らかになっており, 現時点ではこれが最も自然な特徴付けであるように思われる.

§2 Wirtinger 積分の一般化. §1 において基本的なアイデアとして述べたことをもう少し正確に定式化する.

自然数 N を固定して $\theta_{m/N,n/N}(u)$ $(m,n\in\mathbf{Z})$ のことを $\theta_{m,n}(u)$ と書くことにする. また 1 次元複素トーラス $E_\tau=\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ から N 等分点を除いたものを $M_{\tau,N}=E_\tau\setminus\{[-(m\tau+n)/N]\}_{0\le m,n\le N-1}$ と書く. このとき $\sum_{m,n=0}^{N-1}c_{m,n}=0$ をみたす定数 $c_{m,n}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ に対し, $M_{\tau,N}$ 上の多価函数 $T_N(u)$ を

$$T_N(u)=\prod_{m,n=0}^{N-1}\theta_{m,n}(u)^{c_{m,n}} \tag{1}$$

で定義し, また $T_N(u)$ が $M_{\tau,N}$ 上に定める階数 1 の局所系を $\mathcal{L}_N$ と記す. すると $\mathcal{L}_N$ 係数のツイスト・コホモロジー群の構造について次が知られている:

Proposition 1.([5]) 仮定 $c_{m,n}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ $(0\le m,n\le N-1)$ のもとで, $M_{\tau,N}$ 上の局所系 $\mathcal{L}_N$ に係数をもつツイスト・コホモロジー群 $H^i(M_{\tau,N},\mathcal{L}_N)$ について,

(i) $i\neq 1$ ならば $H^i(M_{\tau,N},\mathcal{L}_N)=0$,

(ii) $\dim H^1(M_{\tau,N},\mathcal{L}_N)=N^2$.

さらに詳しく, 有理型 1-形式を用いた生成元の表示が得られている:

$$\varphi_1(u)=du,\quad \varphi_2(u)=\rho'(u)du,$$
$$\varphi_{m,n}(u)=(\rho_{m,n}(u)-\rho(u))du,\ 0\le m,n\le N-1,(m,n)\neq(0,0),$$

とおくと $H^1(M_{\tau,N},\mathcal{L}_N)$ はこの N^2+1 個の有理型 1-形式により生成され, ただ一つの関係式

$$\sum_{0\le m,n\le N-1,(m,n)\neq(0,0)}c_{m,n}\varphi_{m,n}(u)=0$$

が存在する.

よく知られた議論により, $\gamma \in H_1(M_{\tau,N}, \check{\mathcal{L}}_N)$ と $\varphi(u) \in H^1(M_{\tau,N}, \mathcal{L}_N)$ の pairing

$$\int_\gamma T_N(u)\varphi(u)$$

は τ を変数とする上半平面上の一価正則な函数を定める. これを "レベル N の Wirtinger 積分" と呼ぶ. 論文 [5] で与えた接続を用いることにより, レベル N の Wirtinger 積分は τ について N^2 階の線形微分方程式をみたすことが示される. このとき次のような主張が成り立つことが自然に期待できる:

Conjecture 1. レベル N の Wirtinger 積分がみたす微分方程式の係数は, 適当な修正 (ゲージの取替え) の下でレベル N の主合同部分群 $\Gamma(N)$ に関する対称性をもつ. その結果として, レベル N の Wirtinger 積分はレベル N の modular 曲線 $\mathbf{H}/\Gamma(N)$ 上の (カスプにのみ確定特異点をもつ) フックス型方程式の解 (の一意化) を与える.

Remark 2. 上述の意味での Wirtinger 積分のレベル N への一般化は, 実は Wirtinger 自身によって 1903 年の論文 [12] で考察されている. その中で実質的に Proposition 1 および Conjecture 1 と同じ内容の主張が与えられている. ただし Conjecture 1 の証明について, ゲージの取替えの際にレベル N・重さ 1 の modular 形式をうまく取ってくる必要があるのだが, その辺りの議論が少し曖昧なように感じられる. それについて筆者自身もまだきちんとは考えていない. そのような事情で "予想" としているのであるが, 基本的には主張自体は正しいと思っている. よって大雑把に言えば, ここまでの内容は Wirtinger の結果の再発見ということも可能である. しかし Wirtinger はこれ以上のことはおそらく何も述べていないように思われる. 特に具体的なことについては何も述べていない. よって本稿でこれ以降に述べられる結果は新しいものである (その後 Wirtinger あるいは他の人による研究が無ければの話だが).

Remark 3. 元の Gauss の超幾何函数に関する Wirtinger 積分は $N = 2$ の場合に対応する. 実際 $\mathbf{H}/\Gamma(2) \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ である. しかし, Proposition 1 によると微分方程式は 4 階になるはずであり, 一見矛盾するように思える. これはレベル 2 の場合のみ 2 等分点が楕円曲線のインボリューションで固定されるという事実から, ツイスト・コホモロジー群にも位数 2 の作用が誘導され 2 次元ずつの固有空間に直和分解し, 各々の直和成分が 2 階微分方程式で閉じるという事情があるためである.

Remark 4. N が大きい時, レベル N の modular 曲線は非有理的となる. また非有理的な代数曲線上の既約な局所系は非リジッドであるので一般には Conjecture 1 から得られるフックス型方程式は新しいものであることが期待できる. 一方, Wirtinger 積分による表示を用いるとレベル 2 の時と同様の議論により, 接続行列やモノドロミ行列の計算が (少なくとも原理的には) 可能である. これは非リジッドでありながら何らかの著しい特徴を持つ新しいクラスの函数の存在を示唆しており, 極めて興味深い対象となり得るように思われる. しかしながら現時点ではそれがどのようなものかについて (特徴づけの仕方も含めて) ほとんど何も分かっていない. 本稿で述べられる幾つかの場合についての具体的な計算結果があるの

みである.

§3 **N=3 の場合.** 以下, レベルを $N=3$ に固定する. Proposition 1 で述べたように, この場合一般には 9 階の方程式になってしまう. とりあえず本稿ではパラメータを特殊な値に制限して方程式が可約になる場合を考え, その可約な部分から低階の微分方程式を取り出すという方針を採る. 実際には次の 3 つの場合について具体的に考えることにする:

1. $c_{0,1}=c_{0,2}=c_{2,0}=c_{1,1}=c_{2,2}=c_{1,2}=c_{2,1}=0$ の場合.

$$T(u)=\theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}},\quad c_{0,0}+c_{1,0}=0,$$

とすると, ツイストコホモロジー群の基底は

$$\varphi_1(u)=du,\quad \varphi_2(u)=\rho'(u)du,$$

で与えられる.

2. $c_{0,1}=c_{0,2}=c_{1,1}=c_{2,2}=c_{1,2}=c_{2,1}=0$ の場合.

$$T(u)=\theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}}\theta_{2,0}(u)^{c_{2,0}},\quad c_{0,0}+c_{1,0}+c_{2,0}=0,$$

とすると, ツイストコホモロジー群の基底は

$$\varphi_1(u)=du,\quad \varphi_2(u)=\rho'(u)du,$$
$$\varphi_{1,0}(u)=(\rho_{1,0}(u)-\rho(u))du,$$

で与えられる.

3. $c_{0,2}=c_{2,0}=c_{1,1}=c_{2,2}=c_{1,2}=c_{2,1}=0$ の場合.

$$T(u)=\theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{0,1}(u)^{c_{0,1}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}},\quad c_{0,0}+c_{0,1}+c_{1,0}=0,$$

とすると, ツイストコホモロジー群の基底は

$$\varphi_1(u)=du,\quad \varphi_2(u)=\rho'(u)du,$$
$$\varphi_{1,0}(u)=(\rho_{1,0}(u)-\rho(u))du,$$

で与えられる.

Remark 5. ここで $c_{m,n}$ の一部を 0 とおくことは Proposition 1 の仮定に抵触するように思われるが, 始めから 2 個および 3 個のテータ函数の冪積を考えると思えば, そのまま Proposition 1 と同様の主張が成り立つ.

以下の計算に必要なレベル 3 の modular 函数についての準備を行う. 特にテータ定数から作られる modular 形式についての沢山の関係式が必要になるのでその

準備も兼ねる. 記号については, 基本的に大山陽介氏の論文 [6] に従うことにする. 先ず, レベル 3 の modular 函数 $a = a(\tau)$ を次で導入する:

$$a - 1 = 9\frac{\eta(3\tau)^3}{\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^3} = -\sqrt{3}i\frac{\theta_{0,1}^3}{\theta_{1,0}^3}, \tag{2}$$

$$a - \omega = \sqrt{3}e^{-\pi i/3}\frac{\eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right)^3}{\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^3} = \sqrt{3}i\frac{\theta_{1,2}^3}{\theta_{1,0}^3}, \tag{3}$$

$$a - \omega^2 = \sqrt{3}e^{\pi i/12}\frac{\eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right)^3}{\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^3} = \sqrt{3}i\frac{\theta_{1,1}^3}{\theta_{1,0}^3}, \tag{4}$$

ここで $\omega = e^{2\pi i/3}$. また $\eta(\tau)$ は Dedekind の eta 関数であり, テータ定数とは次の関係にある:

$$\begin{aligned}
\theta' &= 2\pi\eta(\tau)^3, \\
\eta(3\tau) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{0,1}, \\
\eta\left(\frac{\tau}{3}\right) &= -i\theta_{1,0}, \\
\eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) &= e^{-\frac{13}{36}\pi i}\theta_{1,1}, \\
\eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) &= e^{-\frac{2}{9}\pi i}\theta_{1,2}.
\end{aligned}$$

さらに $t = a^3$ とすると t は $\tilde{\Gamma}_1(3)$ に関する modular 函数になる, ここで

$$\tilde{\Gamma}_1(3) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid p \equiv s \equiv 1, q \equiv 0 \mod 3\right\}.$$

eta 函数に関して次の公式が知られている:

$$\eta(3\tau)\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)\eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right)\eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) = e^{\pi i/12}\eta(\tau)^4, \tag{5}$$

(5) の両辺を対数微分することにより

$$\frac{4}{3}\frac{\dot{\theta}'}{\theta'} = \frac{\dot{\theta}_{0,1}}{\theta_{0,1}} + \frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}} + \frac{\dot{\theta}_{1,1}}{\theta_{1,1}} + \frac{\dot{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}} \tag{6}$$

を得る. さらに $\Gamma(3)$ に関する重さ 1 のモジュラー形式 $\kappa = \kappa(\tau)$ を次で定義する:

$$\kappa = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\frac{\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^3}{\eta(\tau)} = \frac{\omega}{3}\frac{\theta_{1,0}^2\theta'}{\theta_{0,1}\theta_{1,1}\theta_{1,2}}. \tag{7}$$

するとモジュラー関数 $a(\tau)$ の τ に関する微分は κ を用いて

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{3(a^3-1)\kappa^2}{2\pi i} \tag{8}$$

で与えられる.

Remark 6. ここで導入した a および κ は要するに, 平面 3 次曲線の族 (Hesse 束): $x^3+y^3+z^3-3axyz=0$ の係数とその周期である. 本稿の構成は解析的であるが代数的な構成を行いたければ, レベル N 構造をもつ楕円曲線の普遍族が作る楕円曲面上に N 等分点からなる切断が作る divisor を考えて, その divisor を取り除いた開曲面上の階数 1 の局所系に係数をもつツイストコホモロジー群とそこに入る Gauss-Manin 接続を記述するという話になると思う.

今,

$$A=\kappa,\ B=(a-1)\kappa,\ C=(a-\omega)\kappa,\ D=(a-\omega^2)\kappa,$$

とおくと, これらも重さ 1 のモジュラー形式である. これらの τ に関する対数微分を

$$W=\frac{\dot{A}}{A},\ X=\frac{\dot{B}}{B},\ Y=\frac{\dot{C}}{C},\ Z=\frac{\dot{D}}{D},$$

とおく. これらの勝手な 2 つの差は重さ 2 のモジュラー形式になる:

$$X-W=(a-\omega)(a-\omega^2)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{0,1}}{\theta_{0,1}}-\frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}}\right),$$

$$Y-W=(a-1)(a-\omega^2)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}}-\frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}}\right),$$

$$Z-W=(a-1)(a-\omega)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{1,1}}{\theta_{1,1}}-\frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}}\right),$$

$$X-Y=(1-\omega)(a-\omega^2)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{0,1}}{\theta_{0,1}}-\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}}\right),$$

$$X-Z=(1-\omega^2)(a-\omega)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{0,1}}{\theta_{0,1}}-\frac{\dot{\theta}_{1,1}}{\theta_{1,1}}\right),$$

$$Y-Z=(\omega-\omega^2)(a-1)\frac{\kappa^2}{c}=3\left(\frac{\dot{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}}-\frac{\dot{\theta}_{1,1}}{\theta_{1,1}}\right),$$

ただし $c=-2\pi i/3$ とした. (2)-(7) を用いて

$$(9)\qquad 3\frac{\dot\theta_{1,0}}{\theta_{1,0}}=W+\frac{1}{8}(W+X+Y+Z),$$

$$(10)\qquad 3\frac{\dot\theta_{0,1}}{\theta_{0,1}}=X+\frac{1}{8}(W+X+Y+Z),$$

$$(11)\qquad 3\frac{\dot\theta_{1,2}}{\theta_{1,2}}=Y+\frac{1}{8}(W+X+Y+Z),$$

$$(12)\qquad 3\frac{\dot\theta_{1,1}}{\theta_{1,1}}=Z+\frac{1}{8}(W+X+Y+Z),$$

$$(13)\qquad \frac{\dot\theta'}{\theta'}=\frac{3}{8}(W+X+Y+Z),$$

が得られる. また W,X,Y,Z は, 次の Halphen 型の微分方程式をみたすことが知られている ([6]):

$$(14)\qquad \begin{cases} \dot X=\frac{1}{3}(2XY-YZ+2ZX+2XW-YW-ZW),\\ \dot Y=\frac{1}{3}(-XY-YZ-ZX+2XW+2YW+2ZW),\\ \dot Z=\frac{1}{3}(2XY+2YZ-ZX-XW+2YW-ZW),\\ \dot W=\frac{1}{3}(-XY+2YZ+2ZX-XW-YW+2ZW). \end{cases}$$

すると (9)-(12) および (14) を用いて

$$(15)\qquad \frac{\ddot\theta_{0,1}}{\theta_{0,1}}-\frac{\dot\theta_{0,1}^2}{\theta_{0,1}^2}=\frac{1}{12}(3XY-YZ+3ZX+3XW-YW-ZW),$$

$$(16)\qquad \frac{\ddot\theta_{1,0}}{\theta_{1,0}}-\frac{\dot\theta_{1,0}^2}{\theta_{1,0}^2}=\frac{1}{12}(-XY-YZ-ZX+3XW+3YW+3ZW),$$

$$(17)\qquad \frac{\ddot\theta_{1,1}}{\theta_{1,1}}-\frac{\dot\theta_{1,1}^2}{\theta_{1,1}^2}=\frac{1}{12}(-XY+3YZ+3ZX-XW-YW+3ZW),$$

$$(18)\qquad \frac{\ddot\theta_{1,2}}{\theta_{1,2}}-\frac{\dot\theta_{1,2}^2}{\theta_{1,2}^2}=\frac{1}{12}(3XY+3YZ-ZX-XW+3YW-ZW),$$

$$(19)\qquad \frac{\ddot\theta'}{\theta'}-\frac{\dot\theta'^2}{\theta'^2}=\frac{1}{4}(XY+YZ+ZX+XW+YW+ZW)$$

を得る.

Lemma 1. 次の公式が成り立つ:

$$\frac{\theta'_{0,1}}{\theta_{0,1}} = -(a+2)\frac{\kappa}{2}, \tag{20}$$

$$\frac{\theta'_{1,2}}{\theta_{1,2}} = (a+2\omega)\frac{\kappa}{2}, \tag{21}$$

$$\frac{\theta'_{1,1}}{\theta_{1,1}} = -(a+2\omega^2)\frac{\kappa}{2}, \tag{22}$$

$$\frac{\theta'_{1,0}}{\theta_{1,0}} = (\omega-\omega^2)a\frac{\kappa}{2}. \tag{23}$$

Proof. テータ函数の加法公式を用いた計算により証明できるが, かなり力づくの計算によるので煩雑になるため省略する. (証明了)

Lemma 1 の両辺を τ で微分することにより

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\theta}'_{0,1}}{\theta_{0,1}} - \frac{\theta'_{0,1}\dot{\theta}_{0,1}}{\theta_{0,1}^2} &= -(a^3-1)\frac{\kappa^3}{2c} + W\frac{\theta'_{0,1}}{\theta_{0,1}},\\
\frac{\dot{\theta}'_{1,2}}{\theta_{1,2}} - \frac{\theta'_{1,2}\dot{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}^2} &= (a^3-1)\frac{\kappa^3}{2c} + W\frac{\theta'_{1,2}}{\theta_{1,2}},\\
\frac{\dot{\theta}'_{1,1}}{\theta_{1,1}} - \frac{\theta'_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}}{\theta_{1,1}^2} &= -(a^3-1)\frac{\kappa^3}{2c} + W\frac{\theta'_{1,1}}{\theta_{1,1}},\\
\frac{\dot{\theta}'_{1,0}}{\theta_{1,0}} - \frac{\theta'_{1,0}\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}^2} &= (\omega-\omega^2)(a^3-1)\frac{\kappa^3}{2c} + W\frac{\theta'_{1,0}}{\theta_{1,0}},
\end{aligned}$$

を得る.

§4 微分方程式の導出. 以上の準備の下で, レベル 3 の Wirtinger 積分がみたす微分方程式の導出を行う. 簡単のために 1 の場合のみ考えることにし, 残りは結果のみ述べる. 残りの場合は遥かに複雑にはなるが本質的には同様の計算である.

$$T(u) = \theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}}, \quad c_{0,0}+c_{1,0}=0,$$

に対して, $\omega_0(u) = (\partial/\partial\tau)\log T(u)$, $\omega(u) = (\partial/\partial u)\log T(u)$, $\nabla = (\partial/\partial u) + \omega(u)$ とおく. このとき, 論文 [5] で導入した $H^1(M_\tau, \mathcal{L})$ の接続 ∇_τ を基底 $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\}$ に関して計算する:

$$\begin{aligned}
2\pi i\nabla_\tau\varphi_1(u) &= 2\pi i(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}(u) + \omega_0(u)\varphi_1(u)) - \nabla\rho(u)\\
&= (c_{0,0}-1)\varphi_2(u) - 2\pi i(c_{0,0}\frac{\dot{\theta}'}{\theta'} + c_{1,0}\frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}})\varphi_1(u),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2\pi i\nabla_\tau\varphi_2(u)\\
=&2\pi i(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}(u)+\omega_0(u)\varphi_2(u))-2\pi i\nabla\dot{\rho}(u)\\
=&2\pi i(c_{0,0}\frac{\dot{\theta}'}{\theta'}+c_{1,0}\frac{\dot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}})\varphi_2(u)+4\pi^2\left\{c_{0,0}(\frac{\ddot{\theta}'}{\theta'}-\frac{\dot{\theta}'^2}{\theta'^2})+c_{1,0}(\frac{\ddot{\theta}_{1,0}}{\theta_{1,0}}-\frac{\dot{\theta}_{1,0}^2}{\theta_{1,0}^2})\right\}\varphi_1(u)
\end{aligned}
$$

が得られる. 今, 勝手なツイストサイクル γ に対して,

$$
g_1(\tau)=-\frac{\kappa}{2}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u),
$$

$$
g_2(\tau)=-\frac{2}{\kappa}\left(\int_\gamma T(u)\varphi_2(u)-\frac{4\pi i}{3}\frac{\dot{\theta}'}{\theta'}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u)\right),
$$

とおくと, §3 で準備した公式のいくつかを適用して

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}g_1(\tau)&=(1-\frac{c_{1,0}}{3})(W-\frac{1}{4}(W+X+Y+Z))g_1(\tau)-(c_{1,0}+1)\frac{\kappa^2}{8\pi i}g_2(\tau)\\
&=\frac{c_{1,0}-3}{12}\left((a-\omega)(a-\omega^2)+(a-1)(a-\omega^2)\right.\\
&\qquad\left.+(a-1)(a-\omega)\right)\frac{\kappa^2}{c}g_1(\tau)+\frac{c_{1,0}+1}{12}\frac{\kappa^2}{c}g_2(\tau),
\end{aligned}
$$

が分かる. ここでレベル 3 のモジュラー関数 $a=a(\tau)$ を用いて変数を τ から a に変換すると, (8) により

$$
\frac{d}{da}g_1(a)=\frac{c_{1,0}-3}{12}\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-\omega}+\frac{1}{a-\omega^2}\right)g_1(a)+\frac{c_{1,0}+1}{12}\frac{1}{a^3-1}g_2(a),
$$

を得る. $g_2(a)$ に対して同様の計算を遂行することにより次が得られる:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{da}g_2(a)=\\
&\left\{\frac{-9c_{1,0}+3}{4}\left(\frac{a-1}{(a-\omega)(a-\omega^2)}+\frac{\omega(a-\omega^2)}{(a-1)(a-\omega)}+\frac{\omega^2(a-\omega)}{(a-1)(a-\omega^2)}\right)\right.\\
&\left.-\frac{c_{1,0}+1}{4}\left(\frac{(a-\omega)(a-\omega^2)}{a-1}+\frac{(a-1)(a-\omega^2)}{a-\omega}+\frac{(a-1)(a-\omega)}{a-\omega^2}\right)\right\}g_1(a)\\
&-\frac{c_{1,0}-3}{12}\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-\omega}+\frac{1}{a-\omega^2}\right)g_2(a).
\end{aligned}
$$

ここで $a=\infty$ は 3 位の極を持つことに注意して

$$
f_1=a^2g_1,\quad f_2=g_2
$$

とおくと

$$
\frac{d}{da}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{a}B_0+(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-\omega}+\frac{1}{a-\omega^2})B_1\right)\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\tag{24}
$$

となる, ここで

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -12c_{1,0}+6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \frac{c_{1,0}-3}{12} & \frac{c_{1,0}+1}{36} \\ \frac{15c_{1,0}-9}{4} & -\frac{c_{1,0}-3}{12} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

この方程式は実は $\mathbf{H}/\tilde{\Gamma}_1(3)$ 上定義されていて, $t=a^3$ を変数に取ることにより

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3t}B_0 + \frac{1}{t-1}B_1\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

ここで, 連立型の線型方程式 (26) を f_1 についての単独 2 階方程式に直すと, そのリーマン図式は

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 2/3 & -c_{1,0}/3 & -1/3 & ;t \\ 1 & c_{1,0}/3 & -1/3 & \end{matrix}\right\}$$

で与えられる. Riemann の P 関数についての関係式

$$t^{-2/3}(1-t)^{c_{1,0}/3}P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 2/3 & -c_{1,0}/3 & -1/3 & ;t \\ 1 & c_{1,0}/3 & -1/3 & \end{matrix}\right\}$$
$$=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & (1-c_{1,0})/3 & ;t \\ 1/3 & 2c_{1,0}/3 & (1-c_{1,0})/3 & \end{matrix}\right\}$$

より パラメータに関する関係

$$\alpha = \beta = \frac{1-c_{1,0}}{3}, \quad \gamma = \frac{2}{3}$$

のもとで, 1 の場合の Wirtinger 積分は Gauss の超幾何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma,t)$ と結ばれることが分かる.

2 の場合について

$$T(u) = \theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}}\theta_{2,0}(u)^{c_{2,0}}, \quad c_{0,0}+c_{1,0}+c_{2,0}=0,$$

とする.

$$g_1 = -\frac{\kappa}{2}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u),$$
$$g_2 = -\frac{2}{\kappa}\left(\int_\gamma T(u)\varphi_2(u) - \frac{4\pi i}{3}\frac{\dot{\theta}'}{\theta'}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u)\right),$$
$$g_3 = \int_\gamma T(u)\varphi_{1,0}(u)$$

とおいてさらに

$$f_1 = a^2 g_1, \quad f_2 = g_2, \quad f_3 = a g_3$$

とおくと, 1 の場合と同様の計算により

$$\frac{d}{da}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{a}B_0 + \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-\omega} + \frac{1}{a-\omega^2}\right)B_1\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{27}$$

が得られる. ただし

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6+12c_{0,0} & 0 & -2(\omega-\omega^2)c_{1,0} \\ -2(\omega-\omega^2)c_{2,0} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{c_{0,0}+3}{12} & \frac{-c_{0,0}+1}{36} & (\omega-\omega^2)\frac{c_{1,0}}{18} \\ -\frac{9+15c_{0,0}}{4} & \frac{c_{0,0}+3}{12} & (\omega-\omega^2)\frac{c_{1,0}}{2} \\ \frac{2}{3}(\omega-\omega^2)c_{2,0} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $t=a^3$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3t}B_0 + \frac{1}{t-1}B_1\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

を得る. $B_\infty = -B_0/3 - B_1$ とおくと, 係数行列の Jordan 標準形は

$$B_0/3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} c_{0,0}/3 & 0 & 0 \\ 0 & c_{1,0}/3 & 0 \\ 0 & 0 & c_{2,0}/3 \end{pmatrix},$$

$$B_\infty \sim \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix},$$

で与えられる. 特に $t=\infty$ は対数的特異点である. 詳しいことは省略するが, 実はこの方程式は適当な変数変換とゲージ変換により一般超幾何函数

$${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;x)$$

に帰着する. 変数とパラメータの対応は

$$\alpha_1 = \frac{c_{0,0}-1}{3},\ \alpha_2 = \frac{c_{1,0}-1}{3},\ \alpha_3 = \frac{c_{2,0}-1}{3},$$
$$\beta_1 = \frac{1}{3},\ \beta_2 = \frac{2}{3},\ x = \frac{t}{t-1}$$

となる.

3 の場合について

$$T(u)=\theta(u)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}}\theta_{0,1}(u)^{c_{0,1}},\quad c_{0,0}+c_{1,0}+c_{0,1}=0,$$

とする.

$$\begin{aligned}
g_1&=-\frac{\kappa}{2}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u),\\
g_2&=-\frac{2}{\kappa}\left(\int_\gamma T(u)\varphi_2(u)-\frac{4\pi i}{3}\frac{\dot\theta'}{\theta'}\int_\gamma T(u)\varphi_1(u)\right),\\
g_3&=\int_\gamma T(u)\varphi_{1,0}(u)
\end{aligned}$$

とおいてさらに

$$f_1=a(a+2)g_1,\ f_2=g_2,\ f_3=(a-\omega)g_3$$

とおくと, 1 の場合と同様の計算により

$$\frac{d}{da}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\left(\frac{P_0}{a}+\frac{P_1}{a-1}+\frac{P_2}{a-\omega}+\frac{P_3}{a-\omega^2}+\frac{P_4}{a+2}\right)\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}\tag{28}$$

を得る. ただし

$$P_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\2c_{0,1}&0&0\\-\frac{3+\sqrt{3}i}{6}c_{0,1}&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{c_{1,0}-3c_{0,1}-3}{12}&\frac{-c_{0,0}+1}{12}&\frac{1+\sqrt{3}i}{12}c_{1,0}\\\frac{-3c_{0,1}+5c_{1,0}-3}{4}&-\frac{c_{1,0}-3c_{0,1}-3}{12}&\frac{1+\sqrt{3}i}{4}c_{1,0}\\0&0&-\frac{c_{1,0}}{3}\end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix}-\frac{c_{0,0}+3}{12}&\frac{\sqrt{3}i}{36}(c_{0,0}-1)&\frac{3-\sqrt{3}i}{36}c_{1,0}\\-\frac{\sqrt{3}i}{4}(5c_{0,0}+3)&\frac{c_{0,0}+3}{12}&-\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}c_{1,0}\\0&0&\frac{-c_{0,0}+3}{3}\end{pmatrix},$$

$$P_3=\begin{pmatrix}-\frac{c_{0,0}+3}{12}&-\frac{\sqrt{3}i}{36}(c_{0,0}-1)&\frac{-3+\sqrt{3}i}{36}c_{1,0}\\\frac{\sqrt{3}i}{4}(5c_{0,0}+3)&\frac{c_{0,0}+3}{12}&\frac{1+\sqrt{3}i}{4}c_{1,0}\\\frac{3+\sqrt{3}i}{3}c_{0,1}&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2c_{1,0}&0&0\\-\frac{3+\sqrt{3}i}{6}c_{0,1}&0&0\end{pmatrix}$$

である．またこれらの行列の Jordan 標準形は

$$P_0 \sim P_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1 \sim \begin{pmatrix} -\frac{c_{1,0}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{1,0}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{1,0}}{3} \end{pmatrix},$$

$$P_2 \sim \begin{pmatrix} -\frac{c_{0,0}}{3}+1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{0,0}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{0,0}}{3} \end{pmatrix},$$

$$P_3 \sim \begin{pmatrix} \frac{c_{0,1}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{1,0}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{0,0}}{3} \end{pmatrix},$$

$$P_\infty \sim \begin{pmatrix} -\frac{c_{0,1}}{3}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{0,1}}{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{0,1}}{3}-1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．全ての特異点は，非対数的であることが (自明ではないが) 確認できる．特に $a=0,-2$ は見かけの特異点である．ゲージ変換により見かけの特異点を消去することは可能であるが，今のところきれいな形にならないのでとりあえずはこのままにしておく．いずれにせよこの方程式は非リジッドであることに注意する．またこのままでは $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の方程式に帰着することも出来ないので一見よく分からない方程式である (実際，講演時にはそのように述べた) が，実は middle convolution により 2 階の方程式に帰着することができ，さらに middle convolution image については $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の方程式に帰着して Gauss の超幾何方程式を用いて解くことが出来ることを次節で見る．

§5 モノドロミ表現の計算． 本節では，レベル 3 の Wirtinger 積分のモノドロミ表現の計算を行う．それは，作り方から自然に分かることであるが，算術的部分群 $\Gamma(3)$ および $\tilde{\Gamma}_1(3)$ の線形表現を与える．まず 1 の場合について monodromy 行列の計算の仕方を簡単に説明する．1 は超幾何に帰着するので通常の方法でも計算できるのであるが，あえて Wirtinger 積分の表示を利用するのである．次に 3 の場合に同様の計算を行って得られる結果を紹介する．さらにその結果に適当に middle convolution を施すと 2 次元表現に帰着されることを見る．これは 2 階で $\mathbf{P}^1$ 上 4 点で特異点を持つ場合なので第 6 Painlevé 方程式の線形モノドロミに対応するとも思える．実際，モノドロミ不変量を計算することにより，金子-奥村 [2] によって考察された P_{VI} の対称解に一致することが分かる．結論として，Gauss の超幾何の 3 重被覆 $t=a^3$ による引き戻しによって得られることになる．

まず準備として $\Gamma(3)$ と $\tilde{\Gamma}_1(3)$ を生成元と基本関係により記述する: $\Gamma(3)$ は 4 つの元

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_\omega = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ T_{\omega^2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},\ T_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

によって生成され, その間に1つの関係式

$$T_\infty T_\omega T_1 T_{\omega^2} = 1$$

が存在する. $\tilde{\Gamma}_1(3)$ は3つの元

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって生成され, 関係式

$$S_0 S_1 S_\infty = 1,\ S_0^3 = (S_\infty^{-1} S_1^{-1})^3 = 1$$

が存在する.

1 の場合について, 積分

$$f_1^{(i)}(\tau) = -\frac{a(\tau)^2\kappa(\tau)}{2}\int_{\gamma_i}\theta(u,\tau)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u,\tau)^{c_{1,0}}du,\quad i=0,1,$$

を考える. ただし積分路 γ_0 はトーラス上0と1を結ぶ path, γ_1 は0と $2\tau/3$ を結ぶ path とする. このとき, 上で与えた $\tilde{\Gamma}_1(3)$ の生成元の変数 τ に対する modular 変換のもとで積分がどのように変換されるかを追跡する. 例えば S_1 について, テータ函数についての modular 変換公式を用いると

$$f_1^{(i)}(\tau+3) = -e^{-2\pi i c_{1,0}/3}\frac{a(\tau)^2\kappa(\tau)}{2}\int_{\gamma_i'}\theta(u,\tau)^{c_{0,0}}\theta_{1,0}(u,\tau)^{c_{1,0}}du,\quad i=0,1,$$

となる. ただし γ_0' は0と1を結ぶ path, γ_1' は0と $2(\tau+3)/3$ を結ぶ path となる. γ_i' $(i=0,1)$ はホモトピックな変形により γ_0 と γ_1 の一次結合として書くことが出来て (本当は多価函数の分枝を決める必要があり, ここでの述べ方は少し曖昧なのであるが)

$$\gamma_0' = \gamma_0,\quad \gamma_1' = (1+e^{2\pi i c_{1,0}/3})\gamma_0 + e^{4\pi i c_{1,0}/3}\gamma_1$$

となる. すなわち

$$(f_1^{(0)}(\tau+3), f_1^{(1)}(\tau+3)) = (f_1^{(0)}(\tau), f_1^{(1)}(\tau))M_1,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i c_{1,0}/3} & 0 \\ 1+e^{-2\pi i c_{1,0}/3} & e^{-2\pi i c_{1,0}/3} \end{pmatrix}$$

を得る. 他の生成元についても同様の議論により, S_0 に対して

$$M_0 = \omega\begin{pmatrix} e^{-2\pi i c_{1,0}/3} & \frac{e^{2\pi i c_{1,0}}-1}{e^{2\pi i c_{1,0}}-e^{2\pi i c_{1,0}/3}} \\ -(1+e^{-2\pi i c_{1,0}/3}) & -(1+e^{-2\pi i c_{1,0}/3}) \end{pmatrix},$$

S_∞ に対して

$$M_\infty = \omega^2\begin{pmatrix} 1 & -e^{2\pi i c_{1,0}/3}\frac{e^{2\pi i c_{1,0}}-1}{e^{2\pi i c_{1,0}}-e^{2\pi i c_{1,0}/3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．これらは関係式

$$M_\infty M_1 M_0 = 1, \quad M_0^3 = 1$$

をみたすことが確かめられる (表現としては転置を取ることになるので積の順序が逆になることに注意).

3 の場合についても同様の議論を行うと, $\Gamma(3)$ の 4 つの生成元の各々に対し 3×3 行列が得られる．結果のみ書くと T_1 に対して

$$M_1 = \begin{pmatrix} e_{10}^{-1} & 1+e_{10}^{-1} & 1+e_{10}^{-1}+e_{10} \\ 0 & e_{10} & e_{10}^2 - e_{10}^{-1} \\ 0 & 0 & e_{10}^{-1} \end{pmatrix},$$

T_ω に対して

$$M_\omega = \begin{pmatrix} e_{01}e_{10} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} + e_{01} + e_{10}^{-1} & e_{01} + e_{10}^{-1} & e_{01}e_{10} + e_{01} + e_{10}^{-1} \\ 0 & e_{01}e_{10} & 0 \\ -e_{01} - e_{10}^{-1} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} & -e_{01} - e_{10}^{-1} & -e_{01} - e_{10}^{-1} \end{pmatrix},$$

T_{ω^2} に対して

$$M_{\omega^2} = \left(\begin{matrix} -e_{10} - e_{01}^{-1} & 1 + e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} \\ -e_{10}^2 - e_{10}e_{01}^{-1} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-2} + e_{10}^{-1} & e_{10} + e_{01}^{-1} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-3} \\ -e_{01}e_{10} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-2} - e_{10}^{-1} & e_{01} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-3} \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} 1 + e_{01}^{-1}e_{10} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} \\ e_{10}^2e_{01}^{-1} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} + e_{01}^{-1} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-3} \\ e_{01} + e_{10} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-3} \end{matrix} \right),$$

T_∞ に対して

$$M_\infty = \begin{pmatrix} e_{01} & 0 & 0 \\ e_{01}^{-1}e_{10}^{-2} - e_{10}e_{01}^{-1} & e_{01}^{-1} & 0 \\ -1 - e_{01} - e_{01}^{-1}e_{10}^{-2} & 0 & e_{01}^{-1} \end{pmatrix}$$

がそれぞれ得られる．ただし $e_{10} = e^{2\pi i c_{1,0}/3}, e_{01} = e^{2\pi i c_{0,1}/3}$ とおいた．これら 4 つの行列の間に関係式

$$M_{\omega^2} M_1 M_\omega M_\infty = 1$$

が成り立つことも確かめられる．各行列の固有値を調べると M_1 の固有値は

$$\{e_{10}^{-1}, e_{10}^{-1}, e_{10}\}$$

M_ω の固有値は

$$\{e_{01}e_{10}, e_{01}e_{10}, e_{01}^{-1}e_{10}^{-1}\} = \{e_{00}^{-1}, e_{00}^{-1}, e_{00}\}$$

M_{ω^2} の固有値は

$$\{e_{01}, e_{10}, e_{01}^{-1}e_{10}^{-1}\} = \{e_{01}, e_{10}, e_{00}\}$$

M_∞ の固有値は

$$\{e_{01}^{-1}, e_{01}^{-1}, e_{01}\}$$

で与えられる．次に Dettweiler-Reiter の論文 [1] で与えられている multiplicative version の middle convolution MC_λ を施すことにより上の 3 次元のモノドロミー表現が 2 次元のモノドロミー表現に帰着されることを見る．まず addition の操作を施して，

$$A_1 := e_{10}M_1$$

$$A_2 := e_{01}^{-1}e_{10}^{-1}M_\omega$$

$$A_3 := e_{01}M_\infty$$

$$A_4 := M_{\omega^2}^{-1} = A_1A_2A_3$$

と定義する．このとき A_1, A_2, A_3 は 1 を重複固有値として持つことに注意する．$\lambda = e_{10}$ と取って，まず convolution C_λ を施すと 9 次元表現が得られる．ところが λ の取り方から $\mathcal{K}+\mathcal{L}$ は 7 次元になることが分かるので MC_λ により 2 次元表現が得られる．結果を述べると

$$N_1 = \begin{pmatrix} e_{10}^3 & -\frac{(1+e_{10}+e_{10}^2)(1+e_{01}+e_{01}^2e_{10})}{e_{01}^2e_{10}^2(1+e_{10})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e_{10}(1+e_{10}+e_{01}e_{10}+e_{01}^2e_{10}^2+e_{01}e_{10}^2+e_{01}^2e_{10}^3)}{1+e_{01}+e_{01}^2e_{10}} & e_{10}^{-1}e_{01}^{-2} \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1+e_{01}e_{10}}{e_{10}} & -\frac{(1+e_{10}+e_{01}e_{10})(1+e_{01}+e_{01}^2e_{10})}{e_{10}^3e_{01}^2(1+e_{10})} \\ \frac{e_{01}^2e_{10}(1+e_{10})(e_{01}^2e_{10}^2+e_{01}e_{10}+1)}{1+e_{01}+e_{01}^2e_{10}} & \frac{1+e_{10}+e_{01}e_{10}+e_{01}^2e_{10}^2}{e_{10}} \end{pmatrix}$$

$$N_4 = N_1N_2N_3$$

となり，N_1 の固有値は

$$\{1, e_{10}^3\}$$

N_2 の固有値は

$$\{1, e_{10}^{-1}e_{01}^{-2}\}$$

N_3 の固有値は

$$\{1, e_{01}^2e_{10}\}$$

N_4 の固有値は

$$\{e_{01}e_{10}^2, e_{10}e_{01}^{-1}\}$$

である．これで $\mathbf{P}^1 \setminus \{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ の 2 次元の monodromy 表現が得られた．そこでこの表現の monodromy 不変量を計算してみる．まず SL-表現にするために

$$N_1' = e_{10}^{-3/2}N_1,$$

$$N_2' = e_{10}^{1/2}e_{01}N_2,$$

$$N_3' = e_{01}^{-1} e_{10}^{-1/2} N_3,$$
$$N_4' = e_{10}^{-3/2} N_4$$

と取り直すと $N_1', N_2', N_3', N_4' \in SL(2, \mathbf{C})$ である．この時 monodromy 不変量は

$$\mathrm{tr}\,(N_1') = e_{10}^{3/2} + e_{10}^{-3/2},$$
$$\mathrm{tr}\,(N_2') = \mathrm{tr}\,(N_3') = \mathrm{tr}\,(N_4') = e_{10}^{1/2} e_{01} + e_{10}^{-1/2} e_{01}^{-1},$$

$$\mathrm{tr}\,(N_1'N_2') = \mathrm{tr}\,(N_2'N_3') = \mathrm{tr}\,(N_3'N_1')$$
$$= -(e_{01}e_{10} + e_{01}^{-1}e_{10}^{-1} + e_{10} + e_{10}^{-1} + e_{01} + e_{01}^{-1} + 1)$$

となっている．このような monodromy 表現は [2] で扱っている P_{VI} の対称解の線形 monodromy に一致する．よってこの表現は Gauss の超幾何において $\gamma = 2/3$ としたものの $t = a^3$ による引き戻しによって得られることが結論される．

Remark 7. 逆に言うと $\gamma = 2/3$ の場合の超幾何函数から出発して $t = a^3$ を用いて $\mathbf{P}^1 \setminus \{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ 上の 2 階方程式に引き戻し middle convolution の操作によって 3 階方程式に持っていったものが 3 の場合の Wirtinger 積分に一致する．ただし middle convolution を施す際, 不分岐点の 3 点を取るのではなく分岐点を混ぜて 3 点取っているので 3 階方程式のレベルでは対称性が崩れることになる．すなわち 3 階の方程式のままでは $t = a^3$ を用いて $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の方程式に落とすことは出来ない．

§6 まとめと今後の課題. 本稿ではまずレベル N の Wirtinger 積分を導入し，それが代数曲線上のフックス型方程式の解になるであろうことを述べた．次にレベル 3 の場合に 3 つの具体的な場合を取り上げ，一つ目は 2 階の方程式で Gauss の超幾何に帰着する，二つ目は 3 階で一般超幾何に帰着する，三つ目は 3 階であるが middle convolution を介して 2 階に帰着しそれは Gauss の超幾何の引き戻しによって記述できる，ということを示した．なおレベル 3 の Wirtinger 積分で 3 階まで (正確にはテータ函数の 3 つまでの積) で得られるものは本質的には上のどれかに一致する (他のものは上の 3 つのものから modular 変換やトーラスの平行移動を用いて得られるため)．一般にフックス型方程式でそのモノドロミ表現が具体的に計算できる場合として

(i) リジッドである．

(ii) (多変数・有理的な) 積分表示を持つ．

(iii) 定義域の幾何学的な被覆写像を利用して既知の方程式に帰着できる．

といった場合が考えられる．今回の結果は (i) と (iii) に含まれることが分かったわけである．では Wirtinger 積分は全て (i)(ii)(iii) のどれかに含まれるのか？ という疑問が自然に生じることと思われるが，個人的な見解になるが，一般的な状況を考えると必ずどれかに帰着するとは考えにくい．少なくともそういう結果を示唆するような一般的構造というのは今のところ全く見えない (実際本稿で扱った場

合についても, 議論は個別的なものであって統一的な構造というのは全く見えなかった). あえて言うなら (iii) に帰着するというのが最も怪しいのであるが, 現在レベル5の場合についてモノドロミ行列の計算を少し進めているが, 得られた結果と特異点の配置の状況を考えるとそう簡単には被覆写像を取れなさそうである (非常に複雑なことをすれば存在するという可能性は否定できないが). ただいずれにしても Wirtinger 積分がアクセサリーパラメータを含みながらもモノドロミ計算可能なフックス型方程式のクラスを与えていることは確かなので, 何か別の角度からの統一的な特徴づけを探る必要があるだろう.

ところでアクセサリーパラメータを含むフックス型方程式のモノドロミの問題は, Painlevé 方程式に代表されるモノドロミ保存変形の問題と表裏一体である. ただし Wirtinger 積分では特異点の配置を変形できないので, "特殊値"を考えていることに対応する (P_{VI} の対称解に帰着する場合を考えればこの意味が納得できるであろう). モノドロミ保存変形の解を非線形特殊函数と見た場合, Wirtinger 積分で与えられるような "特殊値" に何らかの意味づけができないかというのも興味深い問題に思われる.

謝辞. 最後になりましたが, 本稿の内容となった研究に関して次の方々にお世話になりました: 北見工業大学の渡辺文彦さんには, 多くの議論に付き合っていただき, 特に古典的文献の内容についてご教示いただきました. 熊本大学の原岡喜重さんには, 高階フックス型方程式についてご教示いただき, 特に本稿の 2 と 3 の場合について貴重な助言をいただきました. 大阪大学の大山陽介さんは, 筆者のいくつかの質問に回答をくださり, 特に P_{VI} の対称解についての論文 [2] を知らせてくださいました. これらの方々に感謝します. また今回, 発表の機会を与えてくださった研究代表者の木村弘信さんに感謝します.

References

[1] M. Dettweiler, S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, J. Symb. Comp., 30 (2000), 761-798.

[2] K. Kaneko, S. Okumura, Special solutions of the sixth Painlevé equation with solvable monodromy, arXiv:math/0610673v1.

[3] T. Mano, Studies on monodromy preserving deformation of linear differential equations on elliptic curves, submitted.

[4] T. Mano, The Riemann-Wirtinger integral and monodromy-preserving deformation on elliptic curves, Intern. Math. Res. Notices, 2008 (2008), ID:rnn110.

[5] T. Mano, H. Watanabe, Twisted cohomology and homology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, preprint, RIMS-1641.

[6] Y. Ohyama, Differential equations for modular forms of level three, Funkcial. Ekvac., 44 (2001), 377-389.

[7] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke. In *Nachträge*, edited by M. Noether and W. Wirtinger. Leipzig, Germany: Teubner, 1902.

[8] H. Watanabe, Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan, 59 (2007), 113-126.

[9] H. Watanabe, Twisted homology and cohomology groups associated to the Wirtinger integral, J. Math. Soc. Japan, 59 (2007), 1067-1080.

[10] H. Watanabe, On the general transformation of the Wirtinger integral, preprint.

[11] W. Wirtinger, Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale, Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 111 (1902), 894-900.

[12] W. Wirtinger, Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale, Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 112 (1903), 1721-1733.